UDC 621.396.67

アンテナパラドックス
：起電力法で計算されたインピーダンスは正しいか

Antenna Paradox
: Is the Impedance Calculated by the EMF Method Correct?

稲垣直樹[1]
Naoki Inagaki

要　　旨

アンテナの入力インピーダンスを計算するための起電力法は半世紀にわたる実績をもちながら、その本質が十分理解されているとは言い難い。境界条件により零となるべき導体表面の電界と電流の積の積分を基礎としており、わざわざ誤差項を計算式に取り込んでいる点に関する疑問は radiation paradox として名高い。本文は、先ず起電力法の公式が変分表現であることを示し、電流分布関数が高い近似度で予想できる場合、たとえば電流分布が正弦関数で近似できる細くて短いダイポールアンテナなどに対しては合理的で巧妙な計算方法であることを述べている。次に、起電力法の定量的な検討を起電力法の改良形であるＩＣＴ（改良された回路的理論）との比較によって行い、ダイポールアンテナの長さ、太さ、２素子ダイポールの間隔に対する数値結果を表とグラフにして示した。なお、本文は電子通信学会主催の専門講習会の原稿に加筆したものである。

Despite the long term history, the electromotive force method (EMF method) for calculating input impedances of antennas has not been fully understood. The question on the erroneous electric field included in the formula is famous as the radiation paradox. In this paper, the variational property of the formula in the EMF method is described first, and then the calculated impedances are quantitatively discussed by comparing the values with those obtained by the ICT which is an improved version of the EMF method. In conclusion, the EMF method is a reasonable and ingenious method, and gives satisfactory results when the conducting wires composing antennas are sufficiently thin and short.

[1] 名古屋工業大学教授

1. まえがき

近年、電波の利用範囲が急速に拡大し、移動体無線通信もパーソナル無線、AVM、自動車電話、小電力機器、GPS（グローバルポジショニングシステム）等多岐にわたりつつある。

いずれのシステムに於いてもアンテナが必要欠くべからざる技術であることは言うまでもなく、又その動作解析は難しいものではあるが、その動作原理、利用についての正確な理解なくしては、既存のアンテナ系の解析は不可能であり、また、新しいアンテナを開発することはできない。

そこで、アンテナ系の重要な要素の1つである入力インピーダンスの合理的な計算方法といえる起電力法についての説明と、実用的なアンテナの基本となるダイポールアンテナの入力インピーダンスの定量的な検討方法について紹介する。

本文は電子通信学会が主催して開催する専門講習会〝電磁波工学におけるパラドックス（その思い違いを探る）〟のために著者が用意した原稿に加筆したものである。この専門講習会は、昭和58年10月の電気四学会連合大会のパネル討論において、同じ標題の下に、電気通信に携わる人たちからたびたび出される盲点とも言える疑問を取り上げ、これを質問の形で提起し、これに著者を含むパネラが解答すると共に、討論を行ったところ、大変好評であったので、同様な会を本年10月札幌で開催することになったものである。取り上げるテーマは、本文の標題の他に、(1)利得無限大、サイドローブ零のアンテナは可能か、(2)一つのアンテナで同一周波数の送受信は可能か、(3)電波はアンテナのどこからどのように放射されるか、(4)静電界の中の磁石はポインティング電力を発生するか、 がある。 興味ある読者は電気四学会連合大会の議事の内容をまとめた東北大学安達三郎教授による電子通信学会誌の「解説」[1)]をお読み頂きたい。

2. 問題の提起

司会者による問題提起を要約すると次のようになる。

アンテナの電流分布が予めある確からしさの程度で知られているとき、アンテナの入力インピーダンスの計算式として次のような式がある。

$$Z_{in}=-\frac{1}{|I_o|^2}\int_V \mathbf{E}\cdot\mathbf{J}^*\,dV \tag{1}$$

I_o は端子電流、$\mathbf{J}$ は仮定した電流分布、$\mathbf{E}$ は $\mathbf{J}$ から誘起される電界である。グリーン関数 $\mathbf{G}$ を用いて次のように書くこともある。

$$Z_{in}=-\frac{1}{|I_o|^2}\int\int_V \mathbf{J}^*\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{J}\,dVdV' \tag{2}$$

このようにして計算されるインピーダンスは比較的実験とよくあうということで古くから用いられており、このような計算方法を起電力法と呼んでいる。

ところで、完全導体のアンテナを考えたとき、境界条件によってアンテナ表面の真の電流分布はアンテナ導体表面で電界の接線成分が零になるように定まるはずであり、式(1)あるいは式(2)の積分は給電分のギャップを除いていたるところ零になるはずのものである。従って、給電部分の電界を Eg とすれば給電ギャップ部分のみの線積分、

$$Z_{in}=-\frac{1}{I_o}\int_G Eg\,dl \tag{3}$$

でよいはずである。ところが、式(3)はほとんど用いられずに、零となるべきなのになっていない誤差をわざわざ計算に含んだ式(1)あるいは式(2)が便利に用いられているのはなぜであろうか。

3. 私の解答

この問題は radiation paradox として歴史的にも有名です。起電力法が初めて用いられてから既

に半世紀が経過し、本問題[2,3,4]が正しく理解されるようになったのも30年以上昔になりますが[5]、この辺の事情を詳しく説明したアンテナ工学の教科書は多くありません。

問題の「正しいか」は次の二通りに解釈されます。

1) 論理的に正しいか

2) 数値的に正しいか

すなわち、起電力法の計算式自体の中に論理的な誤りはないか、とするのが 1)であり、論理的に正しいとしても、その近似度は実用に耐える程度なのか、とするのが 2)であります。ここで提起された問題点は 1)に該当するものと思われますので、先ずその論理的正当性を論じ、次に 2)の点にも触れてみたいと思います。

3．1　起電力法の定性的な考察

アンテナのインピーダンスを求める問題は、ベクトル場の境界値問題であり、慣れないうちは近付き難い印象を与えます。しかし、その本質は集中定数回路となんら異なるところはありません。図-1のアンテナと集中定数回路を比較しながら、両者の類似性について考えてみましょう。要点をまとめると表-1のようになります。

アンテナの給電電圧V_{in}に対する電流分布 $I(z)$ は境界条件を表現する積分方程式により定まり、この解の $z=0$ に於ける値、$I(0)$、が給電点電流 I_{in} に等しいのであるから、給電点インピーダンスは

$$Z_{in}=\frac{V_{in}}{I_{in}} \qquad (4)$$

によって計算することが出来ます。この過程を回路の問題に置き換えて考えてみますと、閉路電流、I_1とI_2、は回路網方程式から定まり、この中のI_1が給電点電流 I_{in} に等しいので、式(4)によって給電点インピーダンスが求められます。

アンテナと回路の根本的な相違点は、電流の決定方程式が一方が積分方程式であるのに対し、他方が有限次元（図-1の場合には2次元）の連立方

表-1　アンテナと集中定数回路のアナロジー

	ア　ン　テ　ナ	集　中　定　数　回　路
境　界　条　件	$\int_{R_a \cup R_g} G(Z, Z') I(Z')\, dZ' = \begin{cases} -V_{in}/d : R_g \\ 0 \quad : R_a \end{cases}$	$\begin{cases} (Z_1+Z_2) I_1 - Z_2 I_2 = V_{in} \\ -Z_2 I_1 + (Z_2+Z_3) I_2 = 0 \end{cases}$
給　電　点 イ ン ピ ー ダ ン ス	$Z_{in}=V_{in}/I_{in} = -\frac{1}{\mid I_{in}\mid_2}\int_{R_g} dZ \int_{R_g \cup R_a} G(Z, Z') I(Z')\, dZ'$	$Z_{in}=V_{in}/I_{in} = \frac{1}{I_1}\left[(Z_1+Z_2) I_1 - Z_2 I_2\right]$
	$Z_{emf} = -\frac{1}{\mid I_{in}\mid^2}\int\int_{R_a \cup R_g} I^*(Z)\, G\, I(Z')\, dZ\, dZ'$	$Z_{emf} = \frac{1}{\mid I_1\mid^2}\begin{bmatrix} I_1^*\{(Z_1+Z_2) I_1 - Z_2 I_2\} \\ +I_2^*\{-Z_2 I_1 + (Z_2+Z_3) I_2\} \end{bmatrix}$
	$Z_{var} = -\frac{1}{I_{in}^2}\int\int_{R_a \cup R_g} I(Z)\, G\, I(Z')\, dZ\, dZ'$	$Z_{var} = \frac{1}{I_1^2}\begin{bmatrix} I_1\{(Z_1+Z_2) I_1 - Z_2 I_2\} \\ +I_2\{-Z_2 I_1 + (Z_2+Z_3) I_2\} \end{bmatrix}$
能　動　領　域	R_g	閉路1
受　動　領　域	R_a	閉路2

程式である点です。従って、式(4)に於けるI_{in}をV_{in}に対して正確に求めることが回路の場合には容易であるのに対し、アンテナの場合には困難であります。そこで、アンテナのために考え出されたのが起電力法であって、表-1中のZ_{emf}による方法です。この公式は、境界条件の方程式の両辺に電流を乗じ、能動領域と受動領域の両方にまたがって積分して複素電力の関係式を求めると得られます。Z_{emf}は$I(z)$の関数形にのみ依存し、その振幅を何倍しても変わらないことに注意して下さい。アンテナの電流分布を、分布定数線路の上の定在波電流分布を借りて近似表現すれば、Z_{emf}によってZ_{in}は近似的に計算されます。

当初、起電力法はダイポールアンテナの様な、電流分布が終端解放の線路上の定在波分布（正弦波分布）によって近似表現されるアンテナに応用されました。この場合には$I(z)$は実関数になりますので、Z_{emf}の公式の中で、$I^*(z)$を$I(z)$により置き換えることが出来ます。このようにすればZ_{var}が得られます。Z_{var}はZ_{emf}と同様に、$I(z)$の関数形にのみ依存することは勿論ですが、それにとどまらず、Z_{var}は変分表現なのです。変分表現であるとは、$I(z)$として真の値から微小量だけはずれた関数を用いて、Z_{var}を計算したときのZ_{var}の変化は二次の微小量になるということです。このことを比較的簡単な回路方程式によって証明しましょう。

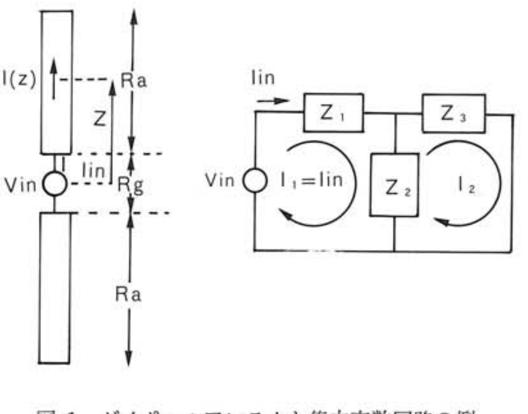

図-1 ダイポールアンテナと集中定数回路の例

Fig. 1 An example of an antenna and a lumped constants network.

$$\Delta(I_{in}^2 Z_{var}) = 2\Delta I_{in}\, I_{in}\, Z_{var} + I_{in}^2 \Delta Z_{var} = 2V_{in}\Delta I_{in} + I_{in}^2 \Delta Z_{var} \qquad (5)$$

が成り立ちますから、

$$\begin{aligned} I_{in}^2 \Delta Z_{var} &= -2V_{in}\Delta I_{in} \\ &\quad + [2\Delta I_1\{I_1(Z_1+Z_2)-Z_2I_2\} + \\ &\qquad 2\Delta I_2\{-Z_2I_1+(Z_2+Z_3)I_2\}] \\ &= -2V_{in}\Delta I_{in} + 2\Delta I_1 V_{in} = 0 \end{aligned} \qquad (6)$$

アンテナの場合にも全く同様にして、Z_{var}の停留性を証明することが出来ます。

以上のように、$I(z)$が実関数で近似できる場合には、Z_{emf}は変分表現に等しく、能動領域における電界の積分だけから計算されるZ_{in}より近似度が高い表現であります。即ち、境界条件の正確な解によれば本来ゼロになる筈の、受動領域の電界（誤差項）を計算式に取り込むことによって、全体の精度を向上させているのです。この様に、起電力法は合理的で巧妙な方法であると言えます。

3.2 起電力法の定量的考察とその改良

EMF法は電流分布が予め正確に予想できる場合に有効です。長さ2h、導線半径aの中央給電ダイポールアンテナを考えると、a/λ（波長）が非常に小さいときの電流分布は$I(z) = \sin[2\pi/\lambda(h-|z|)]$の正弦分布で近似できることが分かっています。線状アンテナの太さの程度はHallénの展開パラメータ“$\Omega = 2\ln(2h/a)$”により表現するのが普通です。Ωに対して正弦波電流分布を用いたEMF法により計算される半波長ダイポール（$2h=\lambda/2$）の給電点インピーダンス（Z_{emf}）を表-2に示しました。同表にはEMF法より正確であるICT（改良された回路的理論[6)・7)]）による値（Z_{ict}）を比較のために示してあります。Ωが大きくなるとZ_{emf}とZ_{ict}の差が小さく

表-2 Ωに対する半波長ダイポールアンテナのインピーダンスの変化
（EMF法とＩＣＴによる計算値）

omega(2h/a)	Z_{emf}		Z_{ict}	
5(12.18)	73.14	27.45	94.25	−49.83
10(148.4)	73.12	41.28	91.03	39.50
15(1808.)	73.13	42.44	81.71	42.46
20(0.2203E+05)	73.13	42.53	78.66	42.67
25(0.2683E+06)	73.13	42.54	77.21	42.68
30(0.3269E+07)	73.13	42.54	76.35	42.67
35(0.3982E+08)	73.13	42.54	75.80	42.66
40(0.4852E+09)	73.13	42.54	75.40	42.65
45(0.5911E+10)	73.13	42.54	75.11	42.64
50(0.7200E+11)	73.13	42.54	74.89	42.63

なることが分かります。しかし、Ωが20より大きくなることは希であることを考えると、半波長ダイポールアンテナのインピーダンス、73.13＋j 42.54（Ω）、は神聖にして侵すべからざるものであるかのように教えてきた従来の教育には問題があるように思います。次に、Ω＝10として、h/λに対する Z_{emf} と Z_{ict} を表-3に示しました。 共振長を越え、 h/λが0.5に近づくと差は大きくなることが分かります。表-2と表-3から、Z_{emf}が有効なのはΩが大きく、h/λが小さいときであると言えます。

さて、ＩＣＴについて若干説明しておきます。これはＥＭＦ法の変分表現を積極的に利用し、変分法によって精度を高めようとしたものです。電流分布を前記の正弦波と、$1-\cos\left[2\pi/\lambda\,(h-|z|)\right]$

表-3 アンテナ長に対するインピーダンスの変化、Ω＝10のダイポール
（EMF法とＩＣＴによる計算値）

h	Z_{emf}		Z_{ict}	
0.05	2.001	−1224.	1.728	−1211.
0.10	8.334	−540.2	7.514	−536.7
0.15	20.14	−274.2	19.54	−274.4
0.20	39.94	−104.2	43.09	−105.3
0.25	73.12	41.28	91.03	39.50
0.30	132.4	199.7	197.4	184.1
0.35	254.2	421.4	447.8	289.6
0.40	580.7	853.8	836.0	53.77
0.45	2227.	2451.	684.6	−448.8
0.50	0.2896 E+14	0.1714 E+14	336.8	−489.5

の形の関数により展開し、インピーダンスが停留になるように二つの展開係数を決めるものです。この理論は複数のアンテナが相互に電磁結合する場合に特に有効で、八木アンテナの解析や設計に用いられます。[8] 多素子アンテナの場合にＥＭＦ法では、給電点電圧と給電点電流の間の関係式を次の回路方程式により表現しました。

$$\sum_{m} Z_{nm}\ I_m = V_n \qquad (4)$$

ここに、Z_{nm} は♯nのアンテナの仮定電流分布と♯mのアンテナの仮定電流分布を用いて計算される相互インピーダンスであり、それぞれの仮定電流分布が真の電流分布に近いときに精度が高いのは言うまでもありません。ＩＣＴにおいては、給電点電圧に対して給電点電流を決める方程式は次のようになります。

$$\begin{cases} \sum_{m} (Z_{nm}^{11}\ I_m^{1} + Z_{nm}^{12}\ I_m^{2}) = V_n \\ \sum_{m} (Z_{nm}^{21}\ I_m^{1} + Z_{nm}^{22}\ I_m^{2}) = V_n \end{cases} \qquad (5)$$

ここに、Z_{nm}^{ij}は♯nのアンテナの第ｉ種電流分布と♯mのアンテナの第ｊ種電流分布の間の（一般化）相互インピーダンス、I_n^{i} では♯nのアンテナの第ｉ種電流分布関数の係数です。各種電流分布関数を給電点における大きさが１に等しいように規格化しておけば、♯nのアンテナの給電点電流は

$$I_n = I_n^{1} + I_n^{2} \qquad (6)$$

によって与えられます。 Z_{nm}^{ij}の具体的な表現式については文献7)を参照して下さい。ＩＣＴは最近、研究の進んだモーメント法の特殊な場合であると見なすことができます。しかし、その方程式〝修正された回路方程式（５）〞は電気屋にとって親しみ深く、比較的簡単であるにも拘らず高い計算精度が得られるという点で、これに勝るものはありません。

図-2と図-3はそれぞれΩ＝10とΩ＝20の場合について、2素子半波長ダイポールの自己インピーダンス（$Z_{11}=R_{11}+jX_{11}$）と相互インピーダンス（$Z_{12}=R_{12}+jX_{12}$）をEMF法とICTにより素子間隔dに対して計算した結果を示しています。EMF法ではZ_{11}に与える相互結合の変化を反映していません。これは電流分布を正弦波分布に固定してしまっているからです。Ωを大きくするとEMF法とICTの結果は似たものになります。

表-2の半波長ダイポールのEMF法とICTに

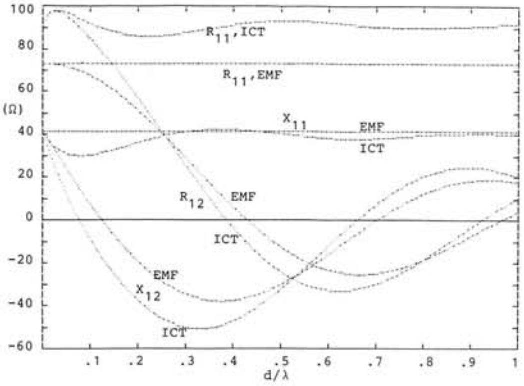

図-2 素子間隔dに対する自己インピーダンスと相互インピーダンスの変化、Ω＝10の場合

Fig. 2 Self and mutual impedance vs: element spacing d, where Ω＝10.

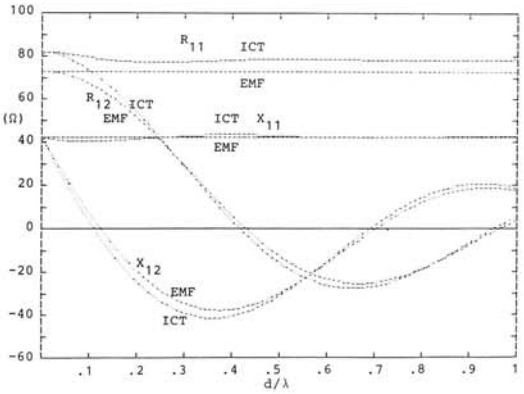

図-3 素子間隔dに対する自己インピーダンスと相互インピーダンスの変化、Ω＝20の場合

Fig. 3 Self and mutual impedance vs: element spacing d, where Ω＝20.

表-4 Ωに対する共振長Hres（波長により規格化）と共振時の放射抵抗および利得

Omega	Hres	Resistance	Gain
10.00	0.2362	74.02	2.183
15.00	0.2412	72.55	2.150
20.00	0.2436	72.46	2.146
25.00	0.2450	72.51	2.145
30.00	0.2459	72.58	2.145
35.00	0.2465	72.64	2.145
40.00	0.2470	72.69	2.146
45.00	0.2474	72.73	2.146
50.00	0.2476	72.76	2.147

よるインピーダンスの計算値は違いが大き過ぎるという印象をお持ちの方が多いのではないでしょうか。実験値とEMF法はそんなに違わなかったはずだと。このようなお考えももっともなのです。それは、アンテナ長が半波長より少し短く、共振（インピーダンスの虚部：リアクタンス、が零になる）時の放射抵抗は73.13Ωに近くなります。この値と、指向性利得（絶対利得）をICTにより共振長に対して計算しました。その結果を表-4に示します。この表から分るように、Ωが大きくても、小さくても、共振時の特性は相似たものになり、EMF法の結果に近いものになるのです。

4. むすび

アンテナのインピーダンスを計算するためのEMF法の有用さ、限界について説明し、その改良形であるICTについても若干の説明をしました。要約すれば、EMF法はその限度をわきまえて使用すればかなり有効であると言えますが、絶対的に正しいものと盲信してはなりません。

長い歴史を持つEMF法には何か素晴らしい点があるに違いないのです。ICTはEMF法の延長線上にあったが故に有用であったのでしょう。このことは、新しい理論を開拓するとき、古いものに連続する思考方法が大変有効であることを教えます。

参考文献

1) 安達三郎：〝電磁波工学におけるパラドックス——その思い違いを探る——〟、電子通信学会誌、vol. 67 No. 6、pp. 657—662 (1984—6).

2) A. A. Pistalkors: "The Radiation Resistance of Beam Antennas", Proc. IRE, vol. 17, pp. 562-579 (March, 1929).

3) P. S. Carter: "Circuit Relations in Radiating Systems and Applications to Antenna Problems", Proc. IRE, vol. 20, pp. 1004-1041 (June, 1932).

4) J. Labus: H. T. E. A., vol. 41, p. 17 (1933).

5) S. A. Schelknuoff: Advanced Antenna Theory, John Wiley & Sons, Chap. 4, pp. 128-139 (1952).

6) N. Inagaki: "An Improved Circuit Theory of a Multielement Antenna", IEEE Trans. Antennas Propag., vol. AP-17, p. 120 (March, 1969).

7) 電子通信学会編：アンテナ工学ハンドブック オーム社、pp. 522—523 (1980).

8) 三国良彦、諸岡翼：〝コンピュータを用いたアンテナ設計〔II〕〟、電子通信学会誌、vol. 63, No. 8, pp. 836—842 (1980—8).

読者の皆様へ

アンテナは、無線通信においては、必要欠くべからざるものであり、当社の主要製品である自動車用ラジオ、各種無線通信システムに於いてもその性能はアンテナ無くしては語ることが出来ません。

しかし、上述のようにアンテナは重要であるにもかかわらず、その動作原理、解析などはなじみが薄いため、読者の皆様に出来るだけ関心をもっていただく意味で、論文としてとりあげることに致しました。

内容については、斯界の権威であり、当社の指導をしていただいている名古屋工業大学教授稲垣先生にご相談し、その結果、アンテナ入力インピーダンスに関して先生が電子通信学会で若い技術者に最近紹介された内容をまとめていただくことに致しました。

大変興味深い理論であり、読者の皆様には是非参考にしていただき、今後のご活用をお願い致します。

編集委員